Tietokoneharjoitus 2

P1, syksy 2011

Tällä kertaa esimerkkien vastaukset eivät ole suoraan näkyvillä, vaan joudut suorittamaan käskyt itse (painamalla Enter ko. rivillä).

Yhtälön ratkaiseminen

Esimerkki:

> $yhtalo1 := x^2 + 2\cdot x - 8 = 0$

$$yhtalo1 := x^2 + 2x - 8 = 0 \tag{1.1}$$

> $ratkaisut := solve(yhtalo1)$

$$ratkaisut := 2, -4 \tag{1.2}$$

> $x1 := ratkaisut[1]; x2 := ratkaisut[2]$

$$x1 := 2$$
$$x2 := -4 \tag{1.3}$$

> $subs(x = x1, yhtalo1)$

$$0 = 0 \tag{1.4}$$

> x

$$x \tag{1.5}$$

Muuttujan x arvo ei muutu sijoituksessa.

> $yhtalo2 := x^3 + 2\cdot x + 8 = 0$

$$yhtalo2 := x^3 + 2x + 8 = 0 \tag{1.6}$$

> $solve(yhtalo2)$

$$-\frac{1}{3}\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3} + \frac{2}{\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3}}, \frac{1}{6}\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3} - \frac{1}{\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3}} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3} - \frac{2}{\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3}}\right), \frac{1}{6}\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3} - \frac{1}{\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3}} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3} - \frac{2}{\left(108+6\sqrt{330}\right)^{1/3}}\right) \tag{1.7}$$

> $fsolve(yhtalo2)$

$$-1.670244697 \tag{1.8}$$

> $fsolve(yhtalo2, x, complex)$

$$-1.67024469696273, 0.835122348481366 - 2.02294043678975\,\mathrm{I}, 0.835122348481366 + 2.02294043678975\,\mathrm{I} \tag{1.9}$$

> $yhtalot3 := x + y = 3, x - y = 6$

$$yhtalot3 := x + y = 3, x - y = 6 \tag{1.10}$$

> $solve(\{yhtalot3\})$

$$\left\{x=\frac{9}{2}, y=-\frac{3}{2}\right\} \quad (1.11)$$

> x, y

$$x, y \quad (1.12)$$

solve-käsky ei muuta symbolien arvoja.

> $assign(\%\%)$

> x, y

$$\frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \quad (1.13)$$

Tämä on eräs tapa kiinnittää muuttujien arvot.

Tehtävä: Ratkaise yhtälö $x^3+x^2-x=0$ ja osoita sijoittamalla, että negatiivinen tulos todella toteuttaa yhtälön.

> $restart$

> $yht := x^3+x^2-x=0$

$$yht := x^3+x^2-x=0 \quad (1.14)$$

> $solve(yht)$

$$0, \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \quad (1.15)$$

> $subs(x=\%[3], yht)$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=0 \quad (1.16)$$

> $simplify(\%)$

$$0=0 \quad (1.17)$$

Tehtävä: Ratkaise numeerisesti yhtälö $\tan(x)=\frac{1}{x}$. Määritä se ratkaisu, joka sijaitsee välillä [0,1].

Vihje: fsolve(yhtälö,x=a..b)

> $yht2 := \tan(x)=\frac{1}{x}$

$$yht2 := \tan(x)=\frac{1}{x} \quad (1.18)$$

> $fsolve(yht2)$

$$-0.8603335890 \quad (1.19)$$

> $fsolve(yht2, x=0..1)$

$$0.8603335890 \quad (1.20)$$

Iterointi ja toistokäsky: tämä jää viimeiseksi paperitehtävien jälkeen, jos jää aikaa

Esimerkki: Viime viikon tehtävässä ratkaistiin yhtälö $\tan(x)=\frac{1}{x}$ iteroimalla. Kokeillaan samaa Maplella:

> $f := x \rightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(2.1)

$$f := x \to \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (2.1)$$

> $x[0] := 1$

$$x_0 := 1 \qquad (2.2)$$

> **for** k **from** 0 **to** 3 **do** *# tässä kohti painetaan Shift + Enter, jolloin rivi vaihtuu*
$x[k+1] := f(x[k])$
od

$$x_1 := \frac{1}{4}\pi$$

$$x_2 := \arctan\left(\frac{4}{\pi}\right)$$

$$x_3 := \arctan\left(\frac{1}{\arctan\left(\frac{4}{\pi}\right)}\right)$$

$$x_4 := \arctan\left(\frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{\arctan\left(\frac{4}{\pi}\right)}\right)}\right) \qquad (2.3)$$

Tämä ei ollut tarkoitus, korjaa tilanne joko (i) muuttamalla alkuarvoksi 1.0, tai (ii) lisäämällä palautuskaavaan evalf-käsky.
Tee korjaukset yllä oleviin käskyhin, niin ei tarvitse kirjoittaa uudelleen.

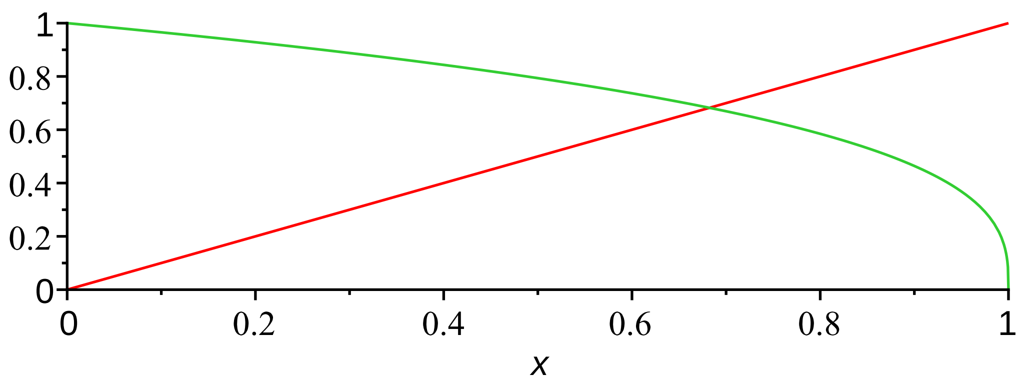
Tehtävä: Totea kuvaajien avulla, että kiintopisteyhtälöllä $x = \sqrt[3]{1-x}$ on 1-käsitteinen ratkaisu välillä [0,1].
Mitä ratkaisua kohti kiintopisteiterointi suppenee, kun alkuarvona on 0, 1 tai 1/2?

Ratkaisu:

> $f := x \to (1-x)^{\frac{1}{3}}$

$$f := x \to (1-x)^{1/3} \qquad (2.4)$$

> $plot([x, f(x)], x = 0..1)$



Kuvaajan perusteella ratkaisu on n. $x = 0.7$.

> $x[0] := 1$

$$x_0 := 1 \qquad (2.5)$$

> **for** k **from** 0 **to** 3 **do**
$x[k+1] := f(x[k])$

od

$$x_1 := 0$$

$$x_2 := 1$$

$$x_3 := 0$$

$$x_4 := 1 \tag{2.6}$$

Tulee jaksollinen tulos; ei suppene. Alkuarvolla 0 käy samoin.

> $x[0] := 0.5$

$$x_0 := 0.5 \tag{2.7}$$

> **for** k **from** 0 **to** 4 **do**
> $x[k+1] := f(x[k])$
> **od**

$$x_1 := 0.7937005260$$

$$x_2 := 0.5908801133$$

$$x_3 := 0.7423639322$$

$$x_4 := 0.6363102035$$

$$x_5 := 0.7138008141 \tag{2.8}$$

Suppenee kohti ratkaisua.

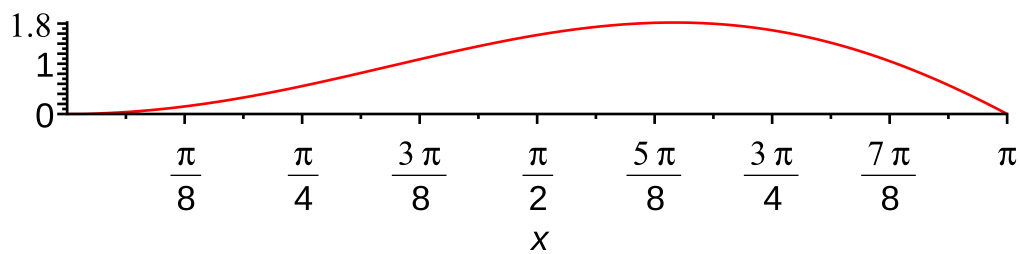
Funktion derivointi, max/min

Esimerkki: Maksimoidaan $x \cdot \sin(x)$ välillä $[0, \pi]$.

> $f := x \to x \cdot \sin(x)$

$$f := x \to x \sin(x) \tag{3.1}$$

> $plot(f(x), x = 0..\mathrm{Pi})$



> $yhtalo := diff(f(x), x) = 0$

$$yhtalo := \sin(x) + x\cos(x) = 0 \tag{3.2}$$

> $solve(yhtalo, x)$

$$x \tag{3.3}$$

Tarkalla ratkaisulla ei ole alkeisfunktiolauseketta.

> $x0 := fsolve(yhtalo, x = 0..\mathrm{Pi})$

$$x0 := 2.028757838 \tag{3.4}$$

> $maksimi := f(x0)$

$$maksimi := 1.819705741 \tag{3.5}$$

Suoraan maximize/minimize:

> $maximize(f(x), x = 0..\mathrm{Pi})$

(3.6)

$$RootOf(\tan(\_Z)+\_Z, 2.028757838)\ \sin(RootOf(\tan(\_Z)+\_Z, 2.028757838)) \quad (3.6)$$

Ei ollutkaan aivan niin helppoa... Katso

> $?maximize$

<u>Tehtävä:</u> Määritä polynomin $p(x) = x^3 - 6\cdot x^2 + 3\cdot x + 6$ maksimi ja minimi välillä [-1,3]. Tarkista kuvaajasta, että tulokset ovat järkeviä.

> $p := x \rightarrow x^3 - 6\cdot x^2 + 3\cdot x + 6$

$$p := x \rightarrow x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 6 \quad (3.7)$$

> $maximize(p(x), x = -1..3)$

$$12 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^3 - 6\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 - 3\sqrt{3} \quad (3.8)$$

> $simplify(\%)$

$$-4 + 6\sqrt{3} \quad (3.9)$$

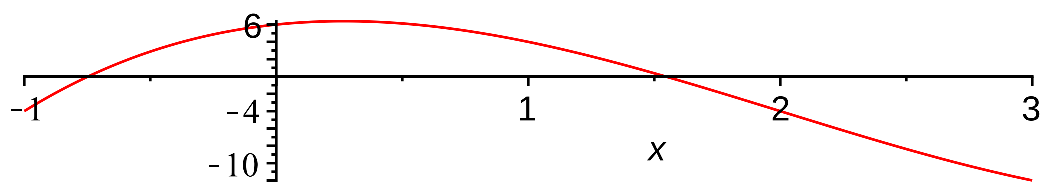
> $minimize(p(x), x = -1..3)$

$$-12 \quad (3.10)$$

> $minimize(p(x), x = -1..3, location)$

$$-12, \{[\{x = 3\}, -12]\} \quad (3.11)$$

> $plot(p(x), x = -1..3)$



Lauseke vs. funktio

Kaikkia funktioita voidaan käsitellä myös lausekkeina; tilanteesta riippuu, kumpi on kätevämpää. Kokeile seuraavia käskyjä:

> $restart$

> $P := x \rightarrow x^4$ *# määritellään P funktiona*

$$P := x \rightarrow x^4 \quad (4.1)$$

> $p := x^4$ *# määritellään p lausekkeena*

$$p := x^4 \quad (4.2)$$

> $P(x)$

$$x^4 \quad (4.3)$$

Käytännössä $P(x)$ on aivan sama kuin p.

> $P(2)$ *# arvojen laskeminen helppoa funktiolle*

$$16 \quad (4.4)$$

> $subs(x = 2, p)$ *# hankalampaa lausekkeelle*

$$16 \quad (4.5)$$

> $\mathrm{D}(P)$

$$x \rightarrow 4\,x^3 \quad (4.6)$$

> $\mathrm{D}(P)(1)$

$$4 \quad (4.7)$$

> $diff(p, x)$

$$4\,x^3 \quad (4.8)$$

> $subs(x=1, diff(p, x))$

$$4 \quad (4.9)$$

> $diff(p, x, x)$

$$12\,x^2 \quad (4.10)$$

> $diff(p, x\$4)$

$$24 \quad (4.11)$$

> $x\$4$

$$x, x, x, x \quad (4.12)$$

> $\mathrm{D}(\mathrm{D}(P))$

$$x \rightarrow 12\,x^2 \quad (4.13)$$

> $\mathrm{D}(\mathrm{D}(P))(1)$

$$12 \quad (4.14)$$

Tehtävä 3

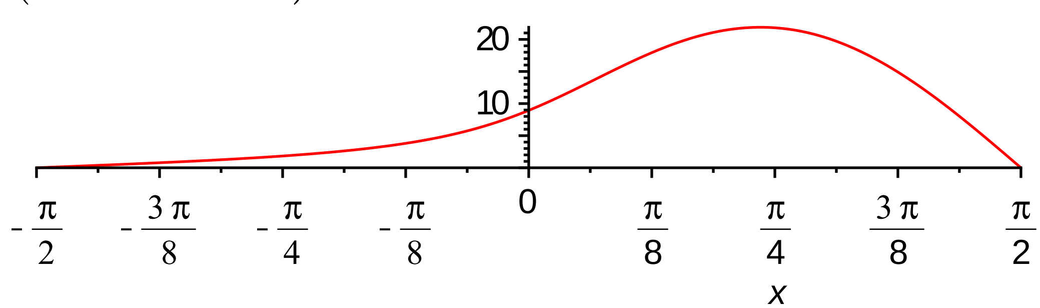
> $restart$

> $f := x \rightarrow \frac{v \cdot \cos(x) \cdot \left(v \cdot \sin(x) + \mathrm{sqrt}\left(v^2 \cdot \sin(x)^2 + 2 \cdot h \cdot g\right)\right)}{g}$

$$f := x \rightarrow \frac{v\cos(x)\left(v\sin(x) + \sqrt{v^2\sin(x)^2 + 2\,h\,g}\right)}{g} \quad (5.1)$$

> $h := 2 : v := 14 : g := 9.81 :$

> $plot\left(f(x), x = -\frac{\mathrm{Pi}}{2} .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$



> $f(0); f\left(-\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right), f\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$ # *kokeillaan työntää vaakasuoraan, alas tai ylös*

$$8.939711995$$
$$0., 0. \quad (5.2)$$

> $maximize\left(f(x), x = -\frac{\mathrm{Pi}}{2} .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$21.88843009 \quad (5.3)$$

> $maximize\left(f(x), x = -\frac{\mathrm{Pi}}{2} .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}, location\right)$

$$21.88843009, \{[\{x = 0.7398384372\}, 21.88843009]\} \quad (5.4)$$

Tai vaiheittain:

> $diff(f(x), x) = 0$

$$-1.427115189\sin(x)\left(14\sin(x)+\sqrt{196\sin(x)^2+39.24}\right)+1.427115189\cos(x)\left(14\cos(x)+\frac{196\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{196\sin(x)^2+39.24}}\right)=0 \quad (5.5)$$

> $fsolve\left(\%, x=-\frac{\mathrm{Pi}}{2}..\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$

$$0.7398384372 \quad (5.6)$$

> $asteet := evalf\left(\frac{180\cdot\%}{\mathrm{Pi}}\right)$

$$asteet := 42.38961996 \quad (5.7)$$

Jos lähtökorkeus on sama kuin osumakorkeus, paras kulma on 45 astetta.

Tehtävä 2

> $restart$

> $v := \mathrm{sqrt}\left(\frac{m\cdot g}{k}\right)\cdot\tanh\left(\mathrm{sqrt}\left(\frac{g\cdot k}{m}\right)\cdot t\right)$

$$v := \sqrt{\frac{m\,g}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{g\,k}{m}}\,t\right) \quad (6.1)$$

> $m\cdot diff(v, t) - m\cdot g + k\cdot v^2 = 0$

$$m\sqrt{\frac{m\,g}{k}}\left(1-\tanh\left(\sqrt{\frac{g\,k}{m}}\,t\right)^2\right)\sqrt{\frac{g\,k}{m}} - m\,g + m\,g\tanh\left(\sqrt{\frac{g\,k}{m}}\,t\right)^2 = 0 \quad (6.2)$$

> $simplify(\%)$

$$\frac{m\left(\sqrt{\frac{m\,g}{k}}\sqrt{\frac{g\,k}{m}}-g\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{g\,k}{m}}\,t\right)^2}=0 \quad (6.3)$$

> $assume(m > 0 \textbf{ and } k > 0 \textbf{ and } g > 0)$

> $simplify(\%\%)$

$$0 = 0 \quad (6.4)$$

Merkki ~ muuttujan perässä tarkoittaa, että sen ominaisuuksia on rajoitettu:

> $about(m)$

```
Originally m, renamed m~:
  is assumed to be: RealRange(Open(0),infinity)
```

> $limit(v, t = infinity)$

$$\sqrt{\frac{m\sim g\sim}{k\sim}} \quad (6.5)$$